ИНДЕКСЫ ЛАСПЕЙРЕСА, ПААШЕ, ФИШЕРА

LASPEYRES, PAASCHE, AND FISHER INDICES

1. ИНДЕКСЫ

Индекс – это статистический индикатор, который одним числом выражает степень изменения во времени некоторого набора взаимосвязанных переменных, характеризующих исследуемое явление.

- Пусть 0 и t обозначают два периода времени, в каждом из которых производятся одинаковые наборы товаров различных видов. Виды этих товаров проиндексированы по $i \in \{1,2,\dots,n\}$.

- q_{it} обозначает физическое количество (quantity) товара i, произведенное в период времени t,

- p_{it} обозначает цену за единицу этого же товара в этом же периоде времени.

Стоимость произведенной массы каждого товара i в период t равна

$$v_{it} = q_{it} p_{it}$$

Общая стоимость всех товаров в периоды 0 и t равна

$$v_0 = p_{10}q_{10} + p_{20}q_{20} + \cdots + p_{i0}q_{i0} + \cdots + p_{n0}q_{n0} = \sum_{i=1}^{n} p_{i0}q_{i0}$$

$$v_t = p_{1t}q_{1t} + p_{2t}q_{2t} + \cdots + p_{it}q_{it} + \cdots + p_{nt}q_{nt} = \sum_{i=1}^{n} p_{it}q_{it}$$

В векторной форме вектор цен в период 0 обозначается

$$\boldsymbol{p_0} \equiv (p_{10},\ p_{20},\ \dots\ p_{i0},\ \dots\ ,\ p_{n0})$$

а вектор количеств обозначается

$$\boldsymbol{q_0} \equiv (q_{10},\ q_{20},\ \dots\ q_{i0},\ \dots\ ,\ q_{n0})$$

Общая стоимость всех товаров в период 0 равна скалярному произведению векторов цен $\boldsymbol{p_0}$ и количеств $\boldsymbol{q_0}$:

$$v_0 = \boldsymbol{p_0} \cdot \boldsymbol{q_0} = \sum_{i=1}^{n} p_{i0} q_{i0}$$

Аналогично,

$$v_t = \boldsymbol{p_t} \cdot \boldsymbol{q_t} = \sum_{i=1}^{n} p_{it} q_{it}$$

Относительное изменение общей стоимости равно соотношению общей стоимости товаров в двух периодах:

$$I_{0,t} = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_{it} q_{it}}{\sum_{i=1}^{n} p_{i0} q_{i0}} = \frac{\boldsymbol{p_t \cdot q_t}}{\boldsymbol{p_0 \cdot q_0}}$$

$I_{0,t}$ называется **индексом стоимости** в периоде t по сравнению с периодом 0.

Умножив числитель и знаменатель на одну и ту же величину $\sum_{i=1}^{n} p_{it} q_{i0}$, получаем:

$$I_{0,t} = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_{it} q_{i0}}{\sum_{i=1}^{n} p_{i0} q_{i0}} \times \frac{\sum_{i=1}^{n} p_{it} q_{it}}{\sum_{i=1}^{n} p_{it} q_{i0}}$$

В произведении двух величин

$$I_{0,t} = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_{it} q_{i0}}{\sum_{i=1}^{n} p_{i0} q_{i0}} \times \frac{\sum_{i=1}^{n} p_{it} q_{it}}{\sum_{i=1}^{n} p_{it} q_{i0}}$$

левая часть, $\frac{\sum_{i=1}^{n} p_{it} q_{i0}}{\sum_{i=1}^{n} p_{i0} q_{i0}}$, является **индексом цен** в периоде t по сравнению с периодом 0.

правая часть, $\frac{\sum_{i=1}^{n} p_{it} q_{it}}{\sum_{i=1}^{n} p_{it} q_{i0}}$, является **индексом количеств** в периоде t по сравнению с периодом 0.

Период времени 0, с которым сравниваются все другие периоды, называется базисным периодом.

В формуле индекса цен

$$I_{price\ 0,t} = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_{it} q_{i0}}{\sum_{i=1}^{n} p_{i0} q_{i0}} = \frac{\boldsymbol{p_t \cdot q_0}}{\boldsymbol{p_0 \cdot q_0}}$$

знаменатель представляет собой агрегированную величину количеств периода 0, оцененных в ценах периода 0,

числитель представляет собой агрегированную величину этих же самых количеств, оцененных в ценах периода *t*.

Таким образом, индекс $I_{price\ 0,t}$ измеряет изменение общей стоимости товаров, которое вызвано **только изменением цен** между периодами 0 и *t*.

Аналогично, индекс количеств

$$I_{quantity\ 0,t} = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_{it} q_{it}}{\sum_{i=1}^{n} p_{it} q_{i0}} = \frac{\boldsymbol{p_t \cdot q_t}}{\boldsymbol{p_t \cdot q_0}}$$

измеряет изменение общей стоимости товаров, которое вызвано **только изменением количеств** между периодами 0 и t.

В обеих формулах

$$I_{price\,0,t} = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_{it} q_{i0}}{\sum_{i=1}^{n} p_{i0} q_{i0}} = \frac{\boldsymbol{p_t \cdot q_0}}{\boldsymbol{p_0 \cdot q_0}} \qquad I_{quantity\,0,t} = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_{it} q_{it}}{\sum_{i=1}^{n} p_{it} q_{i0}} = \frac{\boldsymbol{p_t \cdot q_t}}{\boldsymbol{p_t \cdot q_0}}$$

есть вектор, который является общим (одинаковым) для числителя и знаменателя.

Это вектор $\boldsymbol{q_0}$ в $I_{price\,0,t}$ и вектор $\boldsymbol{p_t}$ в $I_{quantity\,0,t}$.

Индексом Ласпейреса называется такой индекс, в формуле расчета которого “общий вектор” принадлежит периоду 0. То есть, $I_{price\,0,t}$ является индексом цен Ласпейреса.

Индекс Пааше – это индексная формула, в которой “общий вектор” принадлежит периоду t.

То есть, $I_{quantity\ 0,t} = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_{it} q_{it}}{\sum_{i=1}^{n} p_{it} q_{i0}} = \frac{\boldsymbol{p_t \cdot q_t}}{\boldsymbol{p_t \cdot q_0}}$ является индексом количеств Пааше.

Индекс стоимости равен произведению индекса цен Ласпейреса на индекс количеств Пааше:

$$I_{0,t} = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_{it} q_{it}}{\sum_{i=1}^{n} p_{i0} q_{i0}} = \underbrace{\frac{\sum_{i=1}^{n} p_{it} q_{i0}}{\sum_{i=1}^{n} p_{i0} q_{i0}}}_{I_{pL\ 0,t}} \times \underbrace{\frac{\sum_{i=1}^{n} p_{it} q_{it}}{\sum_{i=1}^{n} p_{it} q_{i0}}}_{I_{qP\ 0,t}}$$

Индекс количеств Ласпейреса – индекс корзинного типа. Он сопоставляет количества продуктов, входящих в корзину, определенную для базисного периода 0:

$$I_{qL}(\boldsymbol{p_1}, \boldsymbol{q_1}, \boldsymbol{p_0}, \boldsymbol{q_0}) = \frac{\boldsymbol{q_1} \cdot \boldsymbol{p_0}}{\boldsymbol{q_0} \cdot \boldsymbol{p_0}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} q_{i1} p_{i0}}{\sum_{i=1}^{n} q_{i0} p_{i0}}$$

Индекс количеств Ласпейреса может быть представлен как взвешенная средняя арифметическая относительных изменений количеств:

$$I_{qL}(\boldsymbol{p_1}, \boldsymbol{q_1}, \boldsymbol{p_0}, \boldsymbol{q_0}) = \frac{\sum_{i=1}^{n} q_{i1} p_{i0}}{\sum_{i=1}^{n} q_{i0} p_{i0}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \frac{q_{i1}}{q_{i0}} q_{i0} p_{i0}}{\sum_{i=1}^{n} q_{i0} p_{i0}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{q_{i1}}{q_{i0}} w_{i0} \ ,$$

где $w_{i0} = \frac{q_{i0} p_{i0}}{\sum_{i=1}^{n} q_{i0} p_{i0}}$ является весом продукта i.

<u>**Индекс количеств Пааше**</u> – индекс корзинного типа вида

$$I_{qP}(\boldsymbol{p_1}, \boldsymbol{q_1}, \boldsymbol{p_0}, \boldsymbol{q_0}) = \frac{\boldsymbol{q_1} \cdot \boldsymbol{p_1}}{\boldsymbol{q_0} \cdot \boldsymbol{p_1}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} q_{i1} p_{i1}}{\sum_{i=1}^{n} q_{i0} p_{i1}}$$

Он может быть представлен как средняя взвешенная гармоническая относительных изменений количеств:

$$I_{qP}(\boldsymbol{p_1}, \boldsymbol{q_1}, \boldsymbol{p_0}, \boldsymbol{q_0}) = \frac{\sum_{i=1}^{n} q_{i1} p_{i1}}{\sum_{i=1}^{n} q_{i0} p_{i1}} = \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} q_{i0} p_{i1}}{\sum_{i=1}^{n} q_{i1} p_{i1}}\right)^{-1} =$$

$$\left[\frac{\sum_{i=1}^{n} \frac{q_{i0}}{q_{i1}} q_{i1} p_{i1}}{\sum_{i=1}^{n} q_{i1} p_{i1}}\right]^{-1} = \left[\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{q_{i1}}{q_{i0}}\right)^{-1} w_{i1}\right]^{-1},$$

где $w_{i1} = \frac{q_{i1} p_{i1}}{\sum_{i=1}^{n} q_{i1} p_{i1}}$ является весом продукта i.

Индекс количеств Пааше может быть переписан как средняя взвешенная арифметическая величин $\frac{q_{i1}}{q_{i0}}$:

$$I_{qP}(\boldsymbol{p_1},\boldsymbol{q_1},\boldsymbol{p_0},\boldsymbol{q_0}) = \frac{\sum_{i=1}^{n} q_{i1}p_{i1}}{\sum_{i=1}^{n} q_{i0}p_{i1}} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\frac{q_{i1}}{q_{i0}}q_{i0}p_{i1}}{\sum_{i=1}^{n} q_{i0}p_{i1}} = \sum_{i=1}^{n}\frac{q_{i1}}{q_{i0}}w_{i,10} \quad ,$$

где $w_{i,10} = \frac{p_{i1}q_{i0}}{\sum_{i=1}^{n} p_{i1}q_{i0}}$ – гибридные веса, в числителе которых произведение цен периода (1) и количеств периода (0).

Если эти гибридные веса заменить на веса $w_{i1} = \frac{p_{i1}q_{i1}}{\sum_{i=1}^{n} p_{i1}q_{i1}}$, то получится **индекс количеств Палгрейва**:

$$I_{qPA}(\boldsymbol{p_1},\boldsymbol{q_1},\boldsymbol{p_0},\boldsymbol{q_0}) = \sum_{i=1}^{n}\frac{q_{i1}}{q_{i0}}w_{i1}$$

Обычно

$$I_{qL}(\boldsymbol{p_1}, \boldsymbol{q_1}, \boldsymbol{p_0}, \boldsymbol{q_0}) > I_{qP}(\boldsymbol{p_1}, \boldsymbol{q_1}, \boldsymbol{p_0}, \boldsymbol{q_0})$$

Это соотношение имеет место, когда относительные изменения цен и количеств отрицательно коррелированы, то есть, возрастание цены сопровождается уменьшением количества товаров этого же вида, и наоборот. Это вполне ожидаемо с точки зрения поведения покупателей, которые стараются заменить более подорожавшие товары на товары, которые подорожали в меньшей степени.

Индекс количеств Ласпейреса можно переписать в виде средней взвешенной гармонической величин $\frac{q_{i1}}{q_{i0}}$:

$$I_{qL}(\boldsymbol{p_1}, \boldsymbol{q_1}, \boldsymbol{p_0}, \boldsymbol{q_0}) = \frac{\sum_{i=1}^{n} q_{i1} p_{i0}}{\sum_{i=1}^{n} q_{i0} p_{i0}} = \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} q_{i0} p_{i0}}{\sum_{i=1}^{n} q_{i1} p_{i0}}\right)^{-1} =$$

$$\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} \frac{q_{i0}}{q_{i1}} q_{i1} p_{i0}}{\sum_{i=1}^{n} q_{i1} p_{i0}}\right)^{-1} = \left[\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{q_{i1}}{q_{i0}}\right)^{-1} w_{i,01}\right]^{-1}.$$

Замена гибридных весов $w_{i,01}$ на веса базисного периода w_{i0} дает **гармонический индекс количеств Ласпейреса**:

$$I_{qHL}(\boldsymbol{p_1}, \boldsymbol{q_1}, \boldsymbol{p_0}, \boldsymbol{q_0}) = \left[\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{q_{i1}}{q_{i0}}\right)^{-1} w_{i0}\right]^{-1}$$

Индекс Фишера рассчитывается как средняя геометрическая индексов Ласпейреса и Пааше :

$$I_{qF}(\boldsymbol{p_1},\boldsymbol{q_1},\boldsymbol{p_0},\boldsymbol{q_0}) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} p_{i0}q_{i1}}{\sum_{i=1}^{n} p_{i0}q_{i0}} \times \frac{\sum_{i=1}^{n} p_{i1}q_{i1}}{\sum_{i=1}^{n} p_{i1}q_{i0}}} =$$

$$\left(\frac{\boldsymbol{p_0 \cdot q_1}}{\boldsymbol{p_0 \cdot q_0}}\right)^{1/2} \left(\frac{\boldsymbol{p_1 \cdot q_1}}{\boldsymbol{p_1 \cdot q_0}}\right)^{1/2}$$

2. ТЕСТЫ

При оценке качества индексов используется набор критериев (“аксиом” или “тестов”), которые отражают желаемые математические свойства индексов.

Система аксиом (или тестов) – это набор определенных минимальных стандартов, которым должен соответствовать индекс.

Тест на мультипликативность (product test)

Пусть имеются индекс цен $I_p(\boldsymbol{p_1}, \boldsymbol{q_1}, \boldsymbol{p_0}, \boldsymbol{q_0})$ и индекс количеств $I_q(\boldsymbol{p_1}, \boldsymbol{q_1}, \boldsymbol{p_0}, \boldsymbol{q_0})$.

Говорят, что эти два индекса, I_p и I_q , удовлетворяют тесту на мультипликативность, если

$$\frac{\boldsymbol{p_1} \cdot \boldsymbol{q_1}}{\boldsymbol{p_0} \cdot \boldsymbol{q_0}} = I_p(\boldsymbol{p_1}, \boldsymbol{q_1}, \boldsymbol{p_0}, \boldsymbol{q_0}) \times I_q(\boldsymbol{p_1}, \boldsymbol{q_1}, \boldsymbol{p_0}, \boldsymbol{q_0})$$

где $\boldsymbol{p_1} \cdot \boldsymbol{q_1}$ и $\boldsymbol{p_0} \cdot \boldsymbol{q_0}$ являются скалярным произведением двух векторов.

Индексы Ласпейреса (и Пааше) не проходят тест:

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} p_{it} q_{it}}{\sum_{i=1}^{n} p_{i0} q_{i0}} \neq \underbrace{\frac{\sum_{i=1}^{n} p_{it} q_{i0}}{\sum_{i=1}^{n} p_{i0} q_{i0}}}_{I_{p\,L}} \times \underbrace{\frac{\sum_{i=1}^{n} p_{i0} q_{it}}{\sum_{i=1}^{n} p_{i0} q_{i0}}}_{I_{q\,L}}$$

Пара индексов Ласпейрес – Пааше проходит тест:

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} p_{it} q_{it}}{\sum_{i=1}^{n} p_{i0} q_{i0}} = \underbrace{\frac{\sum_{i=1}^{n} p_{it} q_{i0}}{\sum_{i=1}^{n} p_{i0} q_{i0}}}_{I_{p\,L}} \times \underbrace{\frac{\sum_{i=1}^{n} p_{it} q_{it}}{\sum_{i=1}^{n} p_{it} q_{i0}}}_{I_{q\,P}}$$

Индекса Фишера проходит тест

$$\frac{\boldsymbol{p_1 \cdot q_1}}{\boldsymbol{p_0 \cdot q_0}} = \sqrt{\left(\frac{\boldsymbol{p_1 \cdot q_0}}{\boldsymbol{p_0 \cdot q_0}}\right)\left(\frac{\boldsymbol{p_1 \cdot q_1}}{\boldsymbol{p_0 \cdot q_1}}\right)} \times \sqrt{\left(\frac{\boldsymbol{p_0 \cdot q_1}}{\boldsymbol{p_0 \cdot q_0}}\right)\left(\frac{\boldsymbol{p_1 \cdot q_1}}{\boldsymbol{p_1 \cdot q_0}}\right)}$$

Тест на положительность (positivity test)

$$I_q(\boldsymbol{p_1}, \boldsymbol{q_1}, \boldsymbol{p_0}, \boldsymbol{q_0}) > 0$$

Тест на непрерывность (continuity test)

$I_q(\boldsymbol{p_1}, \boldsymbol{q_1}, \boldsymbol{p_0}, \boldsymbol{q_0})$ является непрерывной функцией аргументов $\boldsymbol{p_1}, \boldsymbol{q_1}, \boldsymbol{p_0}, \boldsymbol{q_0}$.

Тест на тождественность (identity test)

$$I_q(\boldsymbol{p_1}, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{p_0}, \boldsymbol{q}) = 1$$

Если $\boldsymbol{q_1}$ и $\boldsymbol{q_0}$ оба равны $\boldsymbol{q}$, то индексы количеств Ласпейреса, Пааше и Фишера становятся равным 1.

Индексы Ласпейреса, Пааше, Фишера проходят все 3 теста

Тесты на однородность (homogeneity tests)

Линейная однородность относительно количеств сравниваемого периода (linear homogeneity in comparison period quantities):

$$I_q(\boldsymbol{p_1}, \lambda\boldsymbol{q_1}, \boldsymbol{p_0}, \boldsymbol{q_0}) = \lambda I_q(\boldsymbol{p_1}, \boldsymbol{q_1}, \boldsymbol{p_0}, \boldsymbol{q_0})$$

Однородность степени минус 1 относительно количеств базисного периода (homogeneity of degree minus one in base period quantities):

$$I_q(\boldsymbol{p_1}, \boldsymbol{q_1}, \boldsymbol{p_0}, \lambda\boldsymbol{q_0}) = \frac{1}{\lambda} I_q(\boldsymbol{p_1}, \boldsymbol{q_1}, \boldsymbol{p_0}, \boldsymbol{q_0})$$

Инвариантность при пропорциональных изменениях цен сравниваемого периода

(invariance to proportional changes in current prices):

$$I_q(\lambda \boldsymbol{p_1}, \boldsymbol{q_1}, \boldsymbol{p_0}, \boldsymbol{q_0}) = I_q(\boldsymbol{p_1}, \boldsymbol{q_1}, \boldsymbol{p_0}, \boldsymbol{q_0})$$

Индексы Ласпейреса, Пааше и Фишера удовлетворяют тестам на однородность

Инвариантность при изменении единиц измерения

(dimensional invariance, or commensurability)

Пусть имеется n чисел: $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Тест на инвариантность при изменении единиц измерения состоит в следующем:

$$I_q(p_{11}, p_{21}, \ldots, p_{n1};\ q_{11}, q_{21}, \ldots, q_{n1};\ p_{10}, p_{20}, \ldots, p_{n0};\ q_{10}, q_{20}, \ldots, q_{n0}) =$$

$$I_q\left(\lambda_1 p_{11}, \lambda_2 p_{21}, \ldots, \lambda_n p_{n1};\ \frac{1}{\lambda_1} q_{11}, \frac{1}{\lambda_2} q_{21}, \ldots, \frac{1}{\lambda_n} q_{n1};\ \lambda_1 p_{10}, \lambda_2 p_{20}, \ldots, \lambda_n p_{n0};\ \frac{1}{\lambda_1} q_{10}, \frac{1}{\lambda_2} q_{20}, \ldots, \frac{1}{\lambda_n} q_{n0}\right)$$

Набор чисел $\{ \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \}$ можно представить как диагональную матрицу $\boldsymbol{\Lambda}$, тогда тест имеет вид:

$$I_q(\boldsymbol{p_1}, \boldsymbol{q_1}, \boldsymbol{p_0}, \boldsymbol{q_0}) = I_q(\boldsymbol{p_1 \Lambda},\ \boldsymbol{q_1 \Lambda^{-1}},\ \boldsymbol{p_0 \Lambda},\ \boldsymbol{q_0 \Lambda^{-1}})$$

Индексы Ласпейреса, Пааше, Фишера проходят этот тест

Тест на обратимость во времени (time reversal test)

$$I_q(\boldsymbol{p_1}, \boldsymbol{q_1}, \boldsymbol{p_0}, \boldsymbol{q_0}) = \frac{1}{I_q(\boldsymbol{p_0}, \boldsymbol{q_0}, \boldsymbol{p_1}, \boldsymbol{q_1})}$$

Для индекса Ласпейреса:

$$I_{q\,L}(\boldsymbol{p_1}, \boldsymbol{q_1}, \boldsymbol{p_0}, \boldsymbol{q_0}) = \frac{\boldsymbol{p_0} \cdot \boldsymbol{q_1}}{\boldsymbol{p_0} \cdot \boldsymbol{q_0}} \qquad I_{q\,L}(\boldsymbol{p_0}, \boldsymbol{q_0}, \boldsymbol{p_1}, \boldsymbol{q_1}) = \frac{\boldsymbol{p_1} \cdot \boldsymbol{q_0}}{\boldsymbol{p_1} \cdot \boldsymbol{q_1}}$$

$$\frac{1}{I_{q\,L}(\boldsymbol{p_0}, \boldsymbol{q_0}, \boldsymbol{p_1}, \boldsymbol{q_1})} = \frac{\boldsymbol{p_1} \cdot \boldsymbol{q_1}}{\boldsymbol{p_1} \cdot \boldsymbol{q_0}} = I_{q\,P}(\boldsymbol{p_1}, \boldsymbol{q_1}, \boldsymbol{p_0}, \boldsymbol{q_0})$$

$$I_{q\,L}\,(\boldsymbol{p_1}, \boldsymbol{q_1}, \boldsymbol{p_0}, \boldsymbol{q_0}) \neq \frac{1}{I_{q\,L}(\boldsymbol{p_0}, \boldsymbol{q_0}, \boldsymbol{p_1}, \boldsymbol{q_1})}$$

Индексы количеств Ласпейреса и Пааше не проходят этот тест, индекс количеств Фишера его проходит.

<u>Тест на обратимость цен</u> (price reversal test):

$$\left(\frac{\boldsymbol{p_1}\cdot\boldsymbol{q_1}}{\boldsymbol{p_0}\cdot\boldsymbol{q_0}}\right)/I_p(\boldsymbol{p_1},\boldsymbol{q_1},\boldsymbol{p_0},\boldsymbol{q_0}) = \left(\frac{\boldsymbol{p_0}\cdot\boldsymbol{q_1}}{\boldsymbol{p_1}\cdot\boldsymbol{q_0}}\right)/I_p(\boldsymbol{p_0},\boldsymbol{q_1},\boldsymbol{p_1},\boldsymbol{q_0})$$

Пояснение:

В левой части формулы теста находится неявный индекс количеств. Неявный индекс количеств – это индекс количеств, получаемый путем деления индекса стоимости на индекс цен.

Правая часть формулы отличается от левой части тем, что $\boldsymbol{p_0}$ и $\boldsymbol{p_1}$ поменялись местами.

В случае индекса Ласпейреса неявным индексом количеств является

$$\left(\frac{\boldsymbol{p_1} \cdot \boldsymbol{q_1}}{\boldsymbol{p_0} \cdot \boldsymbol{q_0}}\right) / I_{p\,L}(\boldsymbol{p_1}, \boldsymbol{q_1}, \boldsymbol{p_0}, \boldsymbol{q_0})$$

В начале презентации показано, что

$$\left(\frac{\boldsymbol{p_1} \cdot \boldsymbol{q_1}}{\boldsymbol{p_0} \cdot \boldsymbol{q_0}}\right) / I_{p\,L}(\boldsymbol{p_1}, \boldsymbol{q_1}, \boldsymbol{p_0}, \boldsymbol{q_0}) = I_{q\,P}(\boldsymbol{p_1}, \boldsymbol{q_1}, \boldsymbol{p_0}, \boldsymbol{q_0})$$

Т.е. в случае индекса Ласпейреса левая часть формулы теста равна индексу Пааше:

$$\underbrace{\left(\frac{\boldsymbol{p_1} \cdot \boldsymbol{q_1}}{\boldsymbol{p_0} \cdot \boldsymbol{q_0}}\right) / I_p(\boldsymbol{p_1}, \boldsymbol{q_1}, \boldsymbol{p_0}, \boldsymbol{q_0})}_{I_{q\,P}(\boldsymbol{p_1}, \boldsymbol{q_1}, \boldsymbol{p_0}, \boldsymbol{q_0})} = \left(\frac{\boldsymbol{p_0} \cdot \boldsymbol{q_1}}{\boldsymbol{p_1} \cdot \boldsymbol{q_0}}\right) / I_p(\boldsymbol{p_0}, \boldsymbol{q_1}, \boldsymbol{p_1}, \boldsymbol{q_0})$$

Рассмотрим теперь правую часть формулы теста:

$$\left(\frac{\boldsymbol{p_0 \cdot q_1}}{\boldsymbol{p_1 \cdot q_0}}\right) / I_{p\,L}(\boldsymbol{p_0}, \boldsymbol{q_1}, \boldsymbol{p_1}, \boldsymbol{q_0}) = \left(\frac{\boldsymbol{p_0 \cdot q_1}}{\boldsymbol{p_1 \cdot q_0}}\right) \Big/ \left(\frac{\boldsymbol{p_0 \cdot q_0}}{\boldsymbol{p_1 \cdot q_0}}\right) =$$

$$= \frac{\boldsymbol{p_0 \cdot q_1}}{\boldsymbol{p_0 \cdot q_0}} = I_{q\,L}(\boldsymbol{p_1}, \boldsymbol{q_1}, \boldsymbol{p_0}, \boldsymbol{q_0})$$

То есть, применительно к индексу Ласпейреса левая и правая часть формулы теста на совпадают друг с другом

$$\left(\frac{\boldsymbol{p_1 \cdot q_1}}{\boldsymbol{p_0 \cdot q_0}}\right) / I_p(\boldsymbol{p_1}, \boldsymbol{q_1}, \boldsymbol{p_0}, \boldsymbol{q_0}) = \left(\frac{\boldsymbol{p_0 \cdot q_1}}{\boldsymbol{p_1 \cdot q_0}}\right) / I_p(\boldsymbol{p_0}, \boldsymbol{q_1}, \boldsymbol{p_1}, \boldsymbol{q_0})$$

Тест на обратимость цен словами:

Если векторы цен, относящиеся к двум периодом, поменять местами, то неявный индекс количеств не изменится.

Индексы Ласпейреса и Пааше не удовлетворяют тесту на обратимость цен, **индекс Фишера проходит этот тест**.

Тест на среднее значение (mean value test)

$$\min_i \frac{q_{i1}}{q_{i0}} \leq I_q(\boldsymbol{p_1}, \boldsymbol{q_1}, \boldsymbol{p_0}, \boldsymbol{q_0}) \leq \max_i \frac{q_{i1}}{q_{i0}}$$

i=1, 2,…n

Индексы количеств Ласпейреса, Пааше и Фишера удовлетворяют тесту на среднее значение.

Тест на невыход за граничные значения Пааше и Ласпейреса (Paasche and Laspeyres bounding best)

проверяет справедливость факта, что значение индекса количеств лежит между индексами Ласпейреса и Пааше:

$$I_{qL}(\boldsymbol{p_1}, \boldsymbol{q_1}, \boldsymbol{p_0}, \boldsymbol{q_0}) \leq I_q(\boldsymbol{p_1}, \boldsymbol{q_1}, \boldsymbol{p_0}, \boldsymbol{q_0}) \leq I_{qP}(\boldsymbol{p_1}, \boldsymbol{q_1}, \boldsymbol{p_0}, \boldsymbol{q_0})$$

или

$$I_{qP}(\boldsymbol{p_1}, \boldsymbol{q_1}, \boldsymbol{p_0}, \boldsymbol{q_0}) \leq I_q(\boldsymbol{p_1}, \boldsymbol{q_1}, \boldsymbol{p_0}, \boldsymbol{q_0}) \leq I_{qL}(\boldsymbol{p_1}, \boldsymbol{q_1}, \boldsymbol{p_0}, \boldsymbol{q_0})$$

Индекс Фишера удовлетворяет тесту на невыход за граничные значения Пааше и Ласпейреса

Тест на монотонность по количествам (monotonicity in quantities)

Тест проверяет справедливость того факта, что индекс количеств I_q возрастает по количествам сравниваемого периода, и уменьшается по количествам базисного периода.

Индексы количеств Ласпейреса, Пааше, Фишера удовлетворяют тесту на монотонность по количествам.

Тест на циркулярность (транзитивность) – circularity (transitivity) test

$$I_q(\boldsymbol{p_1},\boldsymbol{q_1},\boldsymbol{p_0},\boldsymbol{q_0}) \times I_q(\boldsymbol{p_2},\boldsymbol{q_2},\boldsymbol{p_1},\boldsymbol{q_1}) = I_q(\boldsymbol{p_2},\boldsymbol{q_2},\boldsymbol{p_0},\boldsymbol{q_0})$$

Индекс количеств, сравнивающий периоды 1 и 0, умноженный на индекс количеств, сравнивающий периоды 2 и 1, равняется индексу количеств, сравнивающему периоды 2 и 0.

Индексы Ласпейреса, Пааше, Фишера не удовлетворяют тесту на циркулярность.

<u>Тест на обратимость факторов</u> (factor reversal test)

Если в формуле расчета индекса поменять местами цены и количества, то любой индекс цен трансформируется в индекс количеств и наоборот

$$I_q(\boldsymbol{p_1}, \boldsymbol{q_1}, \boldsymbol{p_0}, \boldsymbol{q_0}) \times I_q(\boldsymbol{q_1}, \boldsymbol{p_1}, \boldsymbol{q_0}, \boldsymbol{p_0}) = \frac{\boldsymbol{p_1} \cdot \boldsymbol{q_1}}{\boldsymbol{p_0} \cdot \boldsymbol{q_0}}$$

Индексы Ласпейреса и Пааше не проходят тест на обратимость факторов, индекс Фишера удовлетворяет тесту на обратимость факторов.

Пояснение. Имеется индекс количеств Ласпейреса:

$$I_{q\,L}(\boldsymbol{p_1}, \boldsymbol{q_1}, \boldsymbol{p_0}, \boldsymbol{q_0}) = \frac{\boldsymbol{p_0} \cdot \boldsymbol{q_1}}{\boldsymbol{p_0} \cdot \boldsymbol{q_0}}$$

В формуле его расчета меняем местами векторы цен и количеств:

$$I_{q\,L}(\boldsymbol{q_1}, \boldsymbol{p_1}, \boldsymbol{q_0}, \boldsymbol{p_0}) = \frac{\boldsymbol{q_0} \cdot \boldsymbol{p_1}}{\boldsymbol{q_0} \cdot \boldsymbol{p_0}}$$

Перемножаем эти два индекса:

$$I_{q\,L}(\boldsymbol{p_1}, \boldsymbol{q_1}, \boldsymbol{p_0}, \boldsymbol{q_0}) \times I_{q\,L}(\boldsymbol{q_1}, \boldsymbol{p_1}, \boldsymbol{q_0}, \boldsymbol{p_0})$$

$$= \frac{(\boldsymbol{p_0} \cdot \boldsymbol{q_1})(\boldsymbol{q_0} \cdot \boldsymbol{p_1})}{(\boldsymbol{p_0} \cdot \boldsymbol{q_0})^2} \neq \frac{\boldsymbol{p_1} \cdot \boldsymbol{q_1}}{\boldsymbol{p_0} \cdot \boldsymbol{q_0}}$$

Индекс называют идеальным, если он удовлетворя-ет тесту на обратимость факторов.

Таким образом, индекс количеств (и цен) Фишера является идеальным индексом.

Список использованной литературы

1. **Balk, Bert M. 2008.** *Price and Quantity Index Numbers: Models for Measuring Aggregate Change and Difference.* New York: Cambridge University Press.

2. **Balk, Bert M. 1995.** Axiomatic Price Index Theory: A Survey. International Statistical Review 63, pp. 69–93

3. Consumer Price Index Manual: Theory and Practice – Geneva: International Labour Office, 2004.

4. **Diewert, Erwin W. 2001.** The Consumer Price Index and Index Number Theory: A Survey. Discussion Paper No. 01-02. Department of Economics, the University of British Columbia.

Список использованной литературы

5. **Diewert, W.E. 2011.** "The Axiomatic Approach to Bilateral Index Number Theory." Chapter 3, Lecture Notes for *Index Number Theory and Measurement Economics*, Department of Economics, University of British Columbia, [Online]. Available at: https://faculty.arts.ubc.ca/ediewert/580ch3.pdf [Accessed 20 July 2020].

6. Export and Import Price Index Manual: Theory and Practice – Washington, D.C.: International Monetary Fund, 2009.

7. **Lippe, Peter von der. 2001.** *Chain indices: a study in price index theory*. Wiesbaden: Statistisches Bundesamt.

8. Producer Price Index Manual: Theory and Practice – Washington, D.C.: International Monetary Fund, 2004.

Список использованной литературы

9. System of National Accounts 2008 – New York: European Commission, International Monetary Fund, Organization for Economic Co-operation and Development, United Nations, World Bank, 2009.

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!

Презентацию подготовил

консультант ЮНИДО д.э.н. Игорь Ульянов