



**ИНДЕКСЫ КОЛИЧЕСТВА:
УСРЕДНЕНИЕ ИЗМЕНЕНИЙ ВО ВРЕМЕНИ
ФИЗИЧЕСКОГО ОБЪЕМА ПРОДУКТОВ**

**Quantity Index Numbers: Measuring the Average
Change Over Time in the Physical Volume of Products**



Индекс количеств – это результат усреднения относительных изменений количеств, q_{i1}/q_{i0} , вычисленных для каждого из товаров некоторой совокупности; при этом усреднение может проводиться по формулам:

- **среднего взвешенного арифметического** – индексы Ласпейреса, Пааше, индексы Палгрейва, Лоу, Янга, Маршалла-Эджворта, Уолша, Гири-Камиса,
- **среднего взвешенного гармонического** – индексы Пааше, Лоу, гармонический индекс Ласпейреса,
- **среднего взвешенного геометрического** – геометрические индексы Ласпейреса, Пааше, Янга, индексы Торнквиста, Монтгомери-Вартия, Сато-Вартия.



При расчете некоторых индексов могут использоваться два этапа усреднения (вычисление среднего из двух индексов) – индексы Фишера, Дробиша.

Весы, применяемые для взвешивания относительных изменений количеств, могут определяться:

- по данным за базисный период,
- по данным за сравниваемый период,
- в виде среднего из данных, относящихся к сравниваемому и базисному периодам.



При расчете **весов** усреднение данных может проводиться по формулам:

- **среднего арифметического** — индексы Маршалла-Эджворта, Торнквиста
- **среднего гармонического** — индекс Гири-Камиса
- **среднего геометрического** — индекс Уолша
- **среднего логарифмического** — индексы Монтгомери-Вартия, Сато-Вартия



1. ИНДЕКСЫ КОРЗИННОГО ТИПА (basket-type indices)

АССИМЕТРИЧНЫЕ ИНДЕКСЫ

Индекс количеств Ласпейреса (Laspeyres quantity index):

$$I_{qL}(p_1, q_1, p_0, q_0) = \frac{p_0 \cdot q_1}{p_0 \cdot q_0} = \frac{\sum_{i=1}^n p_{i0} q_{i1}}{\sum_{i=1}^n p_{i0} q_{i0}} = \sum_{i=1}^n \frac{q_{i1}}{q_{i0}} w_{i0} ,$$

где $w_{i0} = \frac{p_{i0} q_{i0}}{\sum_{i=1}^n p_{i0} q_{i0}}$

Индекс количеств Пааше (Paasche quantity index):

$$I_{qP}(p_1, q_1, p_0, q_0) = \frac{p_1 \cdot q_1}{p_1 \cdot q_0} = \frac{\sum_{i=1}^n p_{i1} q_{i1}}{\sum_{i=1}^n p_{i1} q_{i0}} = \left[\sum_{i=1}^n \left(\frac{q_{i1}}{q_{i0}} \right)^{-1} w_{i1} \right]^{-1} ,$$

где $w_{i1} = \frac{p_{i1} q_{i1}}{\sum_{i=1}^n p_{i1} q_{i1}}$



Индекс количеств Пааше может быть переписан как средняя взвешенная арифметическая относительных изменений количеств:

$$I_{qP}(p_1, q_1, p_0, q_0) = \frac{\sum_{i=1}^n q_{i1} p_{i1}}{\sum_{i=1}^n q_{i0} p_{i1}} = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{q_{i1}}{q_{i0}} q_{i0} p_{i1}}{\sum_{i=1}^n q_{i0} p_{i1}} =$$
$$\sum_{i=1}^n \frac{q_{i1}}{q_{i0}} w_{i,10}$$

где $w_{i,10} = \frac{q_{i0} p_{i1}}{\sum_{i=1}^n q_{i0} p_{i1}}.$

То есть, индекс Пааше – это также арифметическая средняя величин $\frac{q_{i1}}{q_{i0}}$ с весами $w_{i,10}$.



Индекс количеств Палгрейва (Palgrave quantity index):

$$I_{qPA}(p_1, q_1, p_0, q_0) = \sum_{i=1}^n \frac{q_{i1}}{q_{i0}} w_{i1}$$

Гармонический индекс количеств Ласпейреса (harmonic Laspeyres quantity index):

$$I_{qHL}(p_1, q_1, p_0, q_0) = \left[\sum_{i=1}^n \left(\frac{q_{i1}}{q_{i0}} \right)^{-1} w_{i0} \right]^{-1}$$

Индекс количеств Лоу (Lowe quantity index):

$$I_{qLO}(q_1, q_0; p_b) = \frac{q_1 \cdot p_b}{q_0 \cdot p_b} = \frac{\sum_{i=1}^n q_{i1} p_{ib}}{\sum_{i=1}^n q_{i0} p_{ib}} = \sum_{i=1}^n \frac{q_{i1}}{q_{i0}} w_{i,b0} ,$$

где $w_{i,b0} = \frac{q_{i0} p_{ib}}{\sum_{i=1}^n q_{i0} p_{ib}}$; p_b – вектор цен, относящийся к некоторому третьему периоду b .



Индекс Лоу также может быть выражен в виде взвешенной средней гармонической относительных изменений количеств:

$$I_{qLO}(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_0; \mathbf{p}_b) = \frac{\sum_{i=1}^n q_{i1} p_{ib}}{\sum_{i=1}^n q_{i0} p_{ib}} = \left(\frac{\sum_{i=1}^n q_{i0} p_{ib}}{\sum_{i=1}^n q_{i1} p_{ib}} \right)^{-1} =$$
$$\left[\sum_{i=1}^n \left(\frac{q_{i1}}{q_{i0}} \right)^{-1} w_{i,b1} \right]^{-1}$$

где $w_{i,b1} = \frac{q_{i1} p_{ib}}{\sum_{i=1}^n q_{i1} p_{ib}}$



Индекс количеств Янга :

$$I_{qY}(q_1/q_0; w_b) = \sum_{i=1}^n \frac{q_{i1}}{q_{i0}} w_{i,b} ,$$

где $w_{i,b} = \frac{p_{ib}q_{ib}}{\sum_{i=1}^n p_{ib}q_{ib}}$

Веса $w_{i,b}$ представляют собой долю расходов на товар i в общей сумме расходов на все товары в базисном периоде b . Эти веса рассчитаны на основе расходов, действительно имевших место в периоде b , в отличие от гибридных весов в общем случае формул индексов Лоу



$$I_{qY}(q_1/q_0; w_b) = \sum_{i=1}^n \frac{q_{i1}}{q_{i0}} w_{i,b}$$

$$w_{i,b} = \frac{p_{ib}q_{ib}}{\sum_{i=1}^n p_{ib}q_{ib}}$$

Если веса исчислены для того же периода, с которым производится сравнение количеств, то есть $b=0$, то индекс Янга становится равным индексу Ласпейреса.

То есть, индекс количеств Ласпейреса является частным случаем индекса количеств Янга.



СИММЕТРИЧНЫЕ ИНДЕКСЫ

Индекс Маршалла-Эдгворта (Marshall-Edgeworth index):

$$I_{qME}(p_1, q_1, p_0, q_0) = \frac{q_1 \cdot \frac{(p_0 + p_1)}{2}}{q_0 \cdot \frac{(p_0 + p_1)}{2}} = \frac{\sum_{i=1}^n q_{i1} \left(\frac{p_{i0} + p_{i1}}{2} \right)}{\sum_{i=1}^n q_{i0} \left(\frac{p_{i0} + p_{i1}}{2} \right)},$$

где $\frac{(p_0 + p_1)}{2}$ вектор, в котором i -й компонент представляет собой среднее арифметическое значений p_{i0} и p_{i1} .

Индекс количеств Уолша (Walsh quantity index):

$$I_{qW}(p_1, q_1, p_0, q_0) = \frac{q_1 \cdot (p_0 p_1)^{1/2}}{q_0 \cdot (p_0 p_1)^{1/2}} = \frac{\sum_{i=1}^n q_{i1} (p_{i0} p_{i1})^{1/2}}{\sum_{i=1}^n q_{i0} (p_{i0} p_{i1})^{1/2}}$$

где $(p_0 p_1)^{1/2}$ является вектором, чья i -я компонента является средним геометрическим p_{i0} и p_{i1} .

Индекс количеств **Гири-Камиса** (Geary-Khamis) – это индекс, в котором веса являются **гармоническими** средними цен базисного и сравниваемого периодов:

$$I_{qGK}(p_1, q_1, p_0, q_0) = \frac{q_1 \cdot \bar{p}}{q_0 \cdot \bar{p}} = \frac{\sum_{i=1}^n q_{i1} \left(\frac{1}{p_{i0}} + \frac{1}{p_{i1}} \right)^{-1}}{\sum_{i=1}^n q_{i0} \left(\frac{1}{p_{i0}} + \frac{1}{p_{i1}} \right)^{-1}},$$

где

$$\bar{p}_i = 2 \left(\frac{1}{p_{i0}} + \frac{1}{p_{i1}} \right)^{-1}$$



Второй подход к построению симметричных индексов состоит в расчете некоторой средней из значений индексов Ласпейреса и Пааше.

Индекс количеств Дробиша (Drobisch index) является средней арифметической индексов Ласпейреса и Пааше.

$$I_{qDR}(p_1, q_1, p_0, q_0) = \frac{1}{2} \left(\frac{q_1 \cdot p_0}{q_0 \cdot p_0} + \frac{q_1 \cdot p_1}{q_0 \cdot p_1} \right)$$

Математическим фактом является то, что средняя геометрическая меньше или равна средней арифметической, поэтому индекс Дробиша больше или равен корреспондирующему с ним индексу Фишера.

Индекс количеств Фишера рассчитывается как средняя геометрическая индексов Ласпейреса и Пааше :

$$I_{qF}(p_1, q_1, p_0, q_0) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n p_{i0} q_{i1}}{\sum_{i=1}^n p_{i0} q_{i0}} \times \frac{\sum_{i=1}^n p_{i1} q_{i1}}{\sum_{i=1}^n p_{i1} q_{i0}}} =$$
$$\left(\frac{p_0 \cdot q_1}{p_0 \cdot q_0} \right)^{1/2} \left(\frac{p_1 \cdot q_1}{p_1 \cdot q_0} \right)^{1/2}$$

Индекс Фишера является единственной индексной формулой вида $I_q(p_1, q_1, p_0, q_0)$ которая удовлетворяет всем рассмотренным нами тестам, кроме теста на циркулярность.



2. СРЕДНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ИНДЕКСЫ

Геометрический индекс количеств Ласпейреса (geometric

Laspeyres quantity index):

$$I_{qGL}(p_1, q_1, p_0, q_0) = \prod_{i=1}^n \left(\frac{q_{i1}}{q_{i0}} \right)^{w_{i0}},$$

где $w_{i0} = \frac{p_{i0}q_{i0}}{\sum_{i=1}^n p_{i0}q_{i0}}$

Геометрический индекс количеств Пааше (geometric

Paasche quantity index):

$$I_{qGP}(p_1, q_1, p_0, q_0) = \prod_{i=1}^n \left(\frac{q_{i1}}{q_{i0}} \right)^{w_{i1}},$$

где $w_{i1} = \frac{p_{i1}q_{i1}}{\sum_{i=1}^n p_{i1}q_{i1}}$



Будучи геометрической средней величин $\frac{q_{i1}}{q_{i0}}$, геометрический индекс количеств Ласпейреса меньше арифметического среднего этих же величин $(\frac{q_{i1}}{q_{i0}})$, но больше их гармонического среднего. Индекс Ласпейреса – арифметическая средняя величин $\frac{q_{i1}}{q_{i0}}$, а индекс Пааше – их гармоническая средняя. Отсюда:

$$I_{qHL} < I_{qGL} < I_{qL}$$

$$I_{qP} < I_{qGP} < I_{qPA}$$



Геометрический индекс количеств Янга (geometric Young quantity index):

$$I_{qGY}(\mathbf{q}_1/\mathbf{q}_0; \mathbf{w}_b) = \prod_{i=1}^n \left(\frac{q_{i1}}{q_{i0}} \right)^{w_{i,b}},$$

где $w_{i,b} = \frac{p_{ib}q_{ib}}{\sum_{i=1}^n p_{ib}q_{ib}}$

Частным случаем при $b = 0$ является геометрический индекс Ласпейреса (то есть, когда весами являются доли расходов на товар каждого вида в периоде 0).



Геометрические индексы Ласпейреса, Пааше и Янга являются **ассимметрично** взвешенными индексами.

Возможно, что их главным недостатком является то, что их не так легко объяснить пользователям, ибо они не являются индексами для фиксированной корзины

(Producer Price Index Manual, 2004, para. 1.49).



Индекс количеств Торнквиста (Törnqvist–Theil index
– это средняя геометрическая геометрических индексов
Ласпейреса и Пааше:

$$I_{qT}(p_1, q_1, p_0, q_0) = \\ \sqrt{I_{qGL}(p_1, q_1, p_0, q_0) \times I_{qGP}(p_1, q_1, p_0, q_0)} = \\ \prod_{i=1}^n \left(\frac{q_{i1}}{q_{i0}} \right)^{(w_{i0} + w_{i1})/2}$$

$$\text{где } w_{i0} = \frac{p_{i0}q_{i0}}{\sum_{i=1}^n p_{i0}q_{i0}} \quad \text{и} \quad w_{i1} = \frac{p_{i1}q_{i1}}{\sum_{i=1}^n p_{i1}q_{i1}}$$

I_{qT} **не** является индексом для фиксированной корзины.

Индекс Монтгомери-Вартия (Montgomery-Vartia index):

$$\ln I_{qMV}(p_1, q_1, p_0, q_0) = \sum_{i=1}^n w_{i1}^{MV} \times \ln \left(\frac{q_{i1}}{q_{i0}} \right)$$

где $w_{i1}^{MV} = \frac{\left(\frac{p_{i1}q_{i1} - p_{i0}q_{i0}}{\ln p_{i1}q_{i1} - \ln p_{i0}q_{i0}} \right)}{\left[\frac{p_1 \cdot q_1 - p_0 \cdot q_0}{\ln(p_1 \cdot q_1) - \ln(p_0 \cdot q_0)} \right]}$,

$\frac{p_{i1}q_{i1} - p_{i0}q_{i0}}{\ln p_{i1}q_{i1} - \ln p_{i0}q_{i0}}$ является **логарифмической** средней вели-

чин $p_{i0}q_{i0}$ и $p_{i1}q_{i1}$,

$\frac{p_1 \cdot q_1 - p_0 \cdot q_0}{\ln(p_1 \cdot q_1) - \ln(p_0 \cdot q_0)}$ является **логарифмической** средней ве-

личин $p_1 \cdot q_1$ и $p_0 \cdot q_0$.

Индекс Сато-Вартия (Sato-Vartia index):

$$\ln I_{qSV}(p_1, q_1, p_0, q_0) = \sum_{j=1}^n w_{i1}^* \times \ln \left(\frac{q_{i1}}{q_{i0}} \right),$$

где $w_{i,1}^* = \frac{\frac{w_{i1} - w_{i0}}{\ln w_{i1} - \ln w_{i0}}}{\sum_{j=1}^n \left(\frac{w_{i1} - w_{i0}}{\ln w_{i1} - \ln w_{i0}} \right)},$

$$w_{i0} = \frac{p_{i0} q_{i0}}{\sum_{i=1}^n p_{i0} q_{i0}}, \quad w_{i1} = \frac{p_{i1} q_{i1}}{\sum_{i=1}^n p_{i1} q_{i1}}$$

$\frac{w_{i1} - w_{i0}}{\ln w_{i1} - \ln w_{i0}}$ — это логарифмическая средняя w_{i1} и w_{i0} .

Индекс Сато-Вартия является модификацией индекса Торнквиста.



Индекс Сато-Вартия имеет впечатляющие свойства и широко используется в макроэкономическом анализе и международной торговле.

Он удовлетворяет важным тестам, включая тесты на мультипликативность, на обратимость во времени, на обратимость факторов.

Индекс Торнквиста не проходит тест на обратимость факторов.



Семинар по индексу промышленного производства Казахстан 2025

ТАБЛИЦА 1. СООТВЕТСТВИЕ ИНДЕКСОВ ОСНОВНЫМ ТЕСТАМ

Тест	Лас-пейрес	Пааше	Фишер	Лоу	Янг	Маршалл-Эджворт	Уолш	Торнквист	Сато-Вартия
Тест на положительность $I_q(p_1, q_1, p_0, q_0) > 0$	+	+	+	+	+	+	+	+	+
Тест на непрерывность $I_q(p_1, q_1, p_0, q_0)$ не- прерывная функция	+	+	+	+	+	+	+	+	
Тест на тождественность $I_q(p_1, q, p_0, q) = 1$	+	+	+	+	+	+	+	+	+
Тест на линейную однородность относительно количеств сравниваемого периода $I_q(p_1, \lambda q_1, p_0, q_0) = \lambda I_q(p_1, q_1, p_0, q_0)$	+	+	+	+	+	+	+	+	+



Семинар по индексу промышленного производства Казахстан 2025

Тест	Лас-пейрес	Паа-ше	Фишер	Лоу	Янг	Маршалл-Эджворт	Уолш	Торнквист	Сато-Вартия
Тест на однородность степени минус 1 относительно количеств базисного периода $I_q(p_1, q_1, p_0, \lambda q_0) = \frac{1}{\lambda} I_q(p_1, q_1, p_0, q_0)$	+	+	+	+	+	+	+	+	+
Тест перестановки товаров $I_q(p_1, q_1, p_0, q_0) = I_q(p_1^*, q_1^*, p_0^*, q_0^*)$ * обозначает перестановку товаров	+	+	+	+	+	+	+	+	+
Инвариантность при изменении единиц измерения $I_q(p_1, q_1, p_0, q_0) = I_q(p_1\Lambda, q_1\Lambda^{-1}, p_0\Lambda, q_0\Lambda^{-1})$	+	+	+	+	+	+	+	+	+



Семинар по индексу промышленного производства Казахстан 2025

Тест	Лас-пей-рес	Пааше	Фишер	Лоу	Янг	Маршалл-Эджворт	Уолш	Торнквист	Сато-Вартия
Тест на обратимость во времени $I_q(p_1, q_1, p_0, q_0)$ $= \frac{1}{I_q(p_0, q_0, p_1, q_1)}$	—	—	+	+	—	+	+	+	+
Тест на обратимость цен $\left(\frac{p_1 \cdot q_1}{p_0 \cdot q_0}\right) / I_p(p_1, q_1, p_0, q_0) =$ $\left(\frac{p_0 \cdot q_1}{p_1 \cdot q_0}\right) / I_p(p_0, q_1, p_1, q_0)$	—	—	+				—	—	—?
Тест на среднее значение $\min_i \frac{q_{i1}}{q_{i0}} \leq$ $I_q(p_1, q_1, p_0, q_0) \leq \max_i \frac{q_{i1}}{q_{i0}}$	+	+	+	+	+	+	+	—** Для количеств	



Семинар по индексу промышленного производства Казахстан 2025

Тест	Лас-пейрес	Пааше	Фишер	Лоу	Янг	Маршалл-Эджворт	Уолш	Торнквист	Сато-Вартиа
Тест на невыход за граничные значения Пааше и Ласпейреса $I_{qL} \leq I_q \leq I_{qP}$ $I_{qL} \geq I_q \geq I_{qP}$			+				—**	—**	—*
Тест на монотонность Если для всех товаров $q_{i1}^* \geq q_{i1}$ и хотя бы для одного товара i это неравенство строгое, то $I_q(p_1, q_1^*, p_0, q_0) > I_q(p_1, q_1, p_0, q_0)$	+	+	+	+	+	+	—**	—**	—*
Тест на циркулярность (транзитивность) $I_q(p_2, q_2, p_1, q_1) \times I_q(p_1, q_1, p_0, q_0) = I_q(p_2, q_2, p_0, q_0)$	—	—	—	+	—	—	—	—	—?



Семинар по индексу промышленного производства Казахстан 2025

Тест	Лас-пейрес	Пааше	Фишер	Лоу	Янг	Маршалл-Эджворт	Уолш	Торнквист	Сато-Вартия
Тест на обратимость факторов $I_q(p_1, q_1, p_0, q_0)$ $\times I_q(q_1, p_1, q_0, p_0)$ $= \frac{p_1 \cdot q_1}{p_0 \cdot q_0}$	—	—	+			—***?		—	+
Тест на мультипликативность $\frac{p_1 \cdot q_1}{p_0 \cdot q_0} =$ $I_p(p_1, q_1, p_0, q_0)$ $\times I_q(p_1, q_1, p_0, q_0)$	— + в паре с I_{pP}	— + в паре с I_{pL}	+			—	—	—	+

* См.: Reinsdorf (2007, P. 21); Diewert (2008, P. 15).

** См.: (CPI Manual, 2004, para. 16.57 – 16.61)

*** См.: (Baldwin, 2004, P.2)



Семинар по индексу промышленного производства Казахстан 2025

Литература:

1. **Abe, Naohito & Rao, D.S. Prasada. 2019.** Multilateral Sato-Vartia Index for International Comparisons of Prices and Real Expenditures. RCESR Discussion Paper Series No. DP19-1 (July).
2. **Baldwin, Andrew. 2004.** Chain Price and Volume Aggregates for the System of National Accounts. Statistics Canada, [Online]. Available at: <http://www.ipeer.ca/papers/Baldwin,A.,June1,formulachoicenova6.pdf> [Accessed 31 July 2020].
3. **Balk, Bert M. 2008.** *Price and Quantity Index Numbers: Models for Measuring Aggregate Change and Difference*. New York: Cambridge University Press.
4. **Bowley, Arthur L. 1907.** *Elements of Statistics*. London: P.S. King & Son.
5. Consumer Price Index Manual: Theory and Practice – Geneva: International Labour Office, 2004.
6. Consumer Price Index Manual: Concepts and Methods – Washington, D.C.: International Monetary Fund, 2020.
7. **Diewert, W. Erwin. 2008.** Index Numbers. Palgrave Macmillan (ed.), *The New Palgrave Dictionary of Economics*.
8. **Diewert, Erwin W. 1978.** Superlative Index Numbers and Consistency in Aggregation. *Econometrica* 46(4), pp. 883-900.



Семинар по индексу промышленного производства Казахстан 2025

9. **Funke, H., Hacker, G., Voeller, J. 1979.** “Fisher's Circular Test Reconsidered”. *Swiss Journal of Economics and Statistics (SJES)* 115, p.p. 677-688.
10. **Producer Price Index Manual: Theory and Practice** – Washington, D.C.: International Monetary Fund, 2004.
11. **Reinsdorf, Marshall. 2007.** *Axiomatic Price Index Theory*. International Monetary Fund.



Семинар по индексу промышленного производства Казахстан 2025

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!

Презентацию подготовил
консультант ЮНИДО д.э.н. Игорь Ульянов