ТРИ ПОДХОДА К ЭКОНОМИЧЕСКИМ ИНДЕКСАМ:

АКСИОМАТИЧЕСКИЙ, СТОХАСТИЧЕСКИЙ, ЭКОНОМИЧЕСКИЙ

THREE APPROACHES TO INDEX NUMBER THEORY:

AXIOMATIC, STOCHASTIC, ECONOMIC

Аксиоматический подход к индексам фокусируется на критериях (желаемых математических свойствах, или “аксиомах”), подходящих для оценки пригодности индексных формул. Система аксиом (тестов) – это набор определенных минимальных стандартов, которым должен соответствовать индекс.

При аксиоматическом подходе цены и количества товаров полагаются не зависимыми друг от друга переменными. Не делается никаких допущений об оптимальном поведении экономических агентов, которое могло бы породить взаимозависимость между ценами и количествами.

Стохастический подход

Главная идея стохастического подхода состоит в том, что вариация во времени производимых количеств каждого продукта может быть разделена на две компоненты: общая для всех продуктов вариация производимых количеств (индекс производства) и вариация, характерная для каждого конкретного продукта. Для определения индекса производства используются методы регрессии.

Экономический подход к индексам основывается на допущении об оптимальном поведении экономических агентов. Он исходит из того, что производители воспринимают наблюдаемые цены как данность, тогда как физические количества производимых продуктов определяются путем решения экономической оптимизационной задачи.

1. ПОНЯТИЕ ОБ ЭКОНОМИЧЕСКОМ ПОДХОДЕ

В случае индексов цен и количеств производителей подход опирается на: Franklin M. Fisher и Karl Shell (1972); Robert B. Archibald (1997).

Функция дохода (revenue function R) определяется как

$$R = \sum_{i=1}^{n} p_i q_i$$

где p_i и q_i обозначают цену и количество произведенного продукта i, n – количество наименований продуктов.

$$R = \sum_{i=1}^{n} p_i q_i$$

Отпускные цены p_i известны (наблюдаемы),

q_i подбираются так, чтобы максимизировать выручку

$$\sum_{i=1}^{n} p_i q_i - \sum_{j=1}^{m} w_j x_j \qquad (1)$$

где x_i и w_j - количество и цена (она известна) фактора производства j, всего имеется m факторов производства.

при условии что

1) технология F удовлетворяет уравнению $F(q_{i,} x_j) = 0$,

(Archibald, 1997, c. 60)

Тогда индекс цен производителей (PPI), построенный для случая фиксированных (неизменных) цен на факторы производства равен:

$$PPI_{FIP} = \frac{R(p_1, w_0, F_0)}{R(p_0, w_0, F_0)}$$

Добавим в максимизационную проблему (1) еще одно (второе) ограничивающее условие 2):

$$\text{Maximize} \sum_{i=1}^{n} p_i q_i - \sum_{j=1}^{m} w_j x_j \qquad (2)$$

при условиях что

1) технология F удовлетворяет уравнению $F(q_{i,} x_j) = 0$,

2) $\sum_{j=1}^{m} w_j x_j = C$

Тогда индекс цен производителей, построенный для случая фиксированных затрат на производство равен:

$$PPI_{FC} = \frac{R(p_1, w_0, C_0, F_0)}{R(p_0, w_0, C_0, F_0)}$$

В максимизационной проблеме (2) ужесточим второе ограничивающее условие, сделав заданными количества факторов производства:

$$\text{Maximize} \sum_{i=1}^{n} p_i q_i - \sum_{j=1}^{m} w_j x_j \qquad (3)$$

при условиях что

1) $F(q_{i,} x_j) = 0$ 2) $x_j = x_j^b$ (заданы)

Тогда индекс цен производителей, построенный для случая фиксированных количеств выпускаемых продуктов равен

$$PPI_{FIQ} = \frac{R(p_1, x_0, F_0)}{R(p_0, x_0, F_0)}$$

Archibald (1997, с. 66-67) доказал, что

$$PPI_{FC}(p_1, p_0, w_0, C_0, F_0) \geq PPI_{FIQ}(p_1, p_0, x_0, F_0)$$
$$\geq PPI_{\text{Ласпейреса}}(p_1, p_0, q_0)$$

$$PPI_{\text{Пааше}}(p_1, p_0, q_1) \geq PPI_{FIQ}(p_1, p_0, x_1, F_1)$$
$$\geq PPI_{FC}(p_1, p_0, w_1, C_1, F_1)$$

Если наблюдаемые (в принципе) индексы Ласпейреса и Пааше различаются не очень значительно, то взятие симметричной средней этих двух индексов должно дать хорошую аппроксимацию экономического индекса цен производителей, где технология будет представлять собой нечто между технологиями базисного и текущего периодов.

Поэтому индекс Фишера должен дать хорошую аппроксимацию ненаблюдаемого теоретического индекса цен производителей.

(Producer Price Index Manual: Theory and Practice, 2004, para. 17.30)

Для неявных индексов количеств, соответствующих индексам цен PPI_{FC} и PPI_{FIQ}, можно записать:

The corresponding implicit quantity indices defined using the product test have the following form:

$$\frac{I(\boldsymbol{p_1}, \boldsymbol{q_1}, \boldsymbol{p_0}, \boldsymbol{q_0})}{PPI_{FC}(p_1, p_0, w_0, C_0, F_0)} \leq \frac{I(\boldsymbol{p_1}, \boldsymbol{q_1}, \boldsymbol{p_0}, \boldsymbol{q_0})}{PPI_{FIQ}(p_1, p_0, x_0, F_0)}$$

$$\leq \frac{I(\boldsymbol{p_1}, \boldsymbol{q_1}, \boldsymbol{p_0}, \boldsymbol{q_0})}{PPI_{\text{Ласпейреса}}(p_1, p_0, q_0)}$$

$$\frac{I(\boldsymbol{p_1}, \boldsymbol{q_1}, \boldsymbol{p_0}, \boldsymbol{q_0})}{PPI_{\text{Пааше}}(p_1, p_0, q_1)} \leq \frac{I(\boldsymbol{p_1}, \boldsymbol{q_1}, \boldsymbol{p_0}, \boldsymbol{q_0})}{PPI_{FIQ}(p_1, p_0, x_1, F_1)}$$

$$\leq \frac{I(\boldsymbol{p_1}, \boldsymbol{q_1}, \boldsymbol{p_0}, \boldsymbol{q_0})}{PPI_{FC}(p_1, p_0, w_1, C_1, F_1)}$$

Индекс Фишера проходит тест на мультипликативность.

Поэтому индекс количеств Фишера должен дать хорошую аппроксимацию ненаблюдаемого теоретического индекса количеств произведенных продуктов.

2. ПОНЯТИЕ О СТОХАСТИЧЕСКОМ ПОДХОДЕ

Допустим, что каждое относительное изменение количеств, $\frac{q_{i,t}}{q_{i,t-1}}$, случайным образом берется из всей совокупности относительных изменений количеств, среднее значение которых по всей этой совокупности представляет собой общий темп роста производства. Вероятность извлечения *i*-го относительного изменения количеств можно принять равной среднему арифметическому из долей *i*-го продукта в общей стоимости всех продуктов в периодах *t-1* и *t*.

В периодах *t* и *t-1* доли продукта *i* в общей стоимости всех продуктов равны соответственно

$$w_{i,t} = \frac{p_{i,t}q_{i,t}}{\sum_{i=1}^{n} p_{i,t}q_{i,t}} \qquad w_{i,t-1} = \frac{p_{i,t-1}q_{i,t-1}}{\sum_{i=1}^{n} p_{i,t-1}q_{i,t-1}}$$

Средняя арифметическая из этих двух долей равна:

$$\bar{w}_{i,t} = \frac{1}{2}\left(w_{i,t} + w_{i,t-1}\right)$$

Главная идея стохастического подхода состоит в том, что вариация во времени производимых количеств каждого продукта может быть разделена на две компоненты:

• общая для всех продуктов вариация производимых количеств (индекс производства),

• вариация, характерная для каждого конкретного продукта.

Это может быть представлено как:

$$\ln\frac{q_{i,t}}{q_{i,t-1}} = \alpha + \varepsilon_i \qquad (*)$$

где α является логарифмом индекса производства, а ε_i является случайной переменной.

Пусть вариация величины ε_i обратно пропорциональна $\bar{w}_{i,t}$:

$$var\ \varepsilon_{it} = \frac{\lambda_t^2}{\bar{w}_{i,t}} \qquad (**)$$

Поскольку ε_{it} представляет собой изменение i-го относительного количества, (**) означает: чем выше доля продукта i в общей стоимости всех продуктов, тем теснее связь между изменением производства продукта i и общим изменением производства. То есть, вариация ε_{it} снижается при увеличении доли продукта i в общем объеме производства.

$$\ln \frac{q_{i,t}}{q_{i,t-1}} = \alpha + \varepsilon_i \qquad (*)$$

В векторной форме уравнение (*) имеет вид:

$$\mathbf{D}_{\boldsymbol{t}} = \alpha_t \boldsymbol{i} + \boldsymbol{\varepsilon}_{\boldsymbol{t}} \qquad (***)$$

где

$$\mathbf{D}_{\boldsymbol{t}} = \begin{bmatrix} ln \frac{q_{1,t}}{q_{1,t-1}} \\ ln \frac{q_{2,t}}{q_{2,t-1}} \\ \dots \\ ln \frac{q_{n,t}}{q_{n,t-1}} \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{i} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \dots \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{\varepsilon}_{\boldsymbol{t}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \\ \varepsilon_{3t} \\ \dots \\ \varepsilon_{nt} \end{bmatrix}$$

Для определения значения α в регрессионном уравнении (***) применяется метод взвешенных наименьших квадратов. Этот метод можно использовать, когда нарушается допущение о постоянстве вариации ошибок, на котором зиждется обычный метод наименьших квадратов.

При рассмотрении стохастического подхода к теории индексов данная презентация опирается на Clements and Izan (1987).

Метод взвешенных наименьших квадратов дает оценку для логарифма индекса производства (α_t):

$$\hat{\alpha}_t = \widehat{lnI}_q = \sum_{i=1}^{n} \left(ln \frac{q_{i,t}}{q_{i,t-1}} \right) \overline{w}_{i,t}$$

или

$$\widehat{I_p} = \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{q_{i,t}}{q_{i,t-1}} \right)^{\overline{w}_{i,t}}$$

Это индекс Торнквиста.

$$I_{qT}(\boldsymbol{p_1}, \boldsymbol{q_1}, \boldsymbol{p_0}, \boldsymbol{q_0}) = \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{q_{i1}}{q_{i0}} \right)^{(w_{i0}+w_{i1})/2}$$

Литература:

1. **Archibald, Robert B. 1977.** "On the Theory of Industrial Price Measurement: Output Price Indexes". *Annals of Economic and Social Measurement* 6 (1), p.p. 57-72.

2. **Clements, Kenneth W., Izan H.Y. 1987.** "The Measurement of Inflation: A Stochastic Approach." *Journal of Business & Economic Statistics*, vol. 5, no 3 (July).

3. **Diewert, Erwin W. 1978**. Superlative Index Numbers and Consistency in Aggregation. *Econometrica* 46(4), pp. 883-900.

4. **Fisher, Franklin M., Shell, Karl. 1972.** *The Economic Theory of Price Indices: Two Essays on the Effects of Taste, Quality, and Technological Change*. New York and London: Academic Press.

5. Producer Price Index Manual: Theory and Practice – Washington, D.C.: International Monetary Fund, 2004.

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!

Презентацию подготовил

консультант ЮНИДО д.э.н. Игорь Ульянов